УДК 51-73

ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ БИФУРКАЦИЙ В НЕЛИНЕЙНОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Аникин П. Д.[1] , Кузнецов Г. Ю. [1]
Научный руководитель – лаборант Власов Н. А.[2]
[1]Академический лицей «Физико-техническая школа» им. Ж. И. Алфёрова
[2]Университет ИТМО
anikinpvl@gmail.com

Введение

На протяжении многих лет модель осциллятора успешно описывает многие физические процессы. Так, например, модель гармонического осциллятора находит свое применение, начиная от школьных задач на колебания пружины или маятника, заканчивая моделями квантовой теории поля. Однако, на сегодняшний день модель гармонического осциллятора является достаточно широко изученной. Другим, менее изученным, классом осцилляторных систем являются нелинейные осцилляторы. Одним из наиболее известных примеров осцилляторов с нелинейностью является нелинейный осциллятор Ван дер Поля [1]. Его характерными особенностями служат нелинейное затухание и наличие предельного цикла — устойчивого режима автоколебаний системы. Важно отметить, что дифференциальное уравнение, описывающее этот осциллятор, не имеет точного аналитического решения, что существенно усложняет анализ его поведения.

Область применения осциллятора Ван дер Поля широка. В частности, с его помощью моделируются сердечные, дыхательные циклы, работа нейронов, геологические разломы, нелинейные вибрации в механических системах, динамика плазмы и лазеров [2,3].

В реальных условиях физические системы часто подвергаются внешним воздействиям. Например, в случае электрических цепей таким воздействием может служить внешний источник напряжения. Известно, что под влиянием внешней гармонической вынуждающей силы в осцилляторе Ван дер Поля возможен переход к хаотическому режиму колебаний.

Таким образом, исследование поведения решений уравнения осциллятора Ван дер Поля с различными внешними вынуждающими силами может способствовать прогнозированию качественного изменения поведений различных физических систем (бифуркаций).

Основная часть

В нашей работе, мы исследовали, как внешняя вынуждающая гармоническая сила влияет на поведение решений уравнения осциллятора Ван дер Поля. В процессе, мы с помощью метода многих масштабов [4] убедились в наличии предельного цикла при отсутствии внешней гармонической силы, а при при ее наличии воспользовались методом Рунге-Кутта для численного анализа и определили безразмерные параметры системы, напрямую влияющие на поведение решений. Оценка хаотичности системы была проведена с помощью спектра Фурье и показателей Ляпунова [5].

Выводы

В данной работе были проклассифицированы качественные типы фазовых портретов осциллятора Ван дер Поля в зависимости от параметров различных внешних вынуждающих сил. Также были выявлены параметры внешних вынуждающих сил, при которых наблюдается смена фазовых портретов и переход к хаотической динамике. В качестве внешних вынуждающих сил были рассмотрены как гармоническая внешняя сила, так и внешние силы других типов. Кроме того, нами были предложены электрические схемы, описываемые различными типами осцилляторов, что открывает возможность для эмпирической верификации результатов математического моделирования.

Литература

1. Girotti M. The Van der Pol oscillator [Электронный ресурс]. — / M. Girotti // MATH 3406 Differential Equations II. — Режим доступа: https://mathemanu.github.io/VanderPol.pdf (Дата обращения 01.03.2026).
2. Короновский А. А., Пономаренко В. И., Прохоров Д. М., Храмов А. Е. Метод исследования синхронизации автоколебаний по унивариантным данным с использованием непрерывного вейвлетного анализа // Журнал технической физики. 2007. Т. 77, № 9. С. 6-17.
3. Кузнецов А. П., Селиверстова Е. С., Трубецков Д. И., Тюрюкина Л. В. Феномен уравнения Ван Дер Поля // Известия вузов. ПНД. 2014. Т. 22, № 4. С. 3-42. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2014-22-4-3-42.
4. Marsden J. E., Sirovich L., John F. Multiple Scale and Singular Perturbation Methods. — New York: Springer. 1991. P. 641. — (Applied Mathematical Sciences, vol. 114).
5. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M. Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 2: Numerical application // Meccanica. 1980. Vol. 15. P. 21–30.