УДК 51-73

Асимптотика резонансных состояний для двухмерных волноводов, соединенных сближающимися отверстиями

Юрова Т. С.[1]
Научный руководитель – д.ф.- м.н., профессор Попов И. Ю.[1]
[1]Университет ИТМО
tsyurova@itmo.ru

Введение

Построение необычных граничных условий, в частности, зависящих от энергии (как, например в [1]), важно для многих физических приложений, в частности, для создания метаматериалов с заданными свойствами [2, 3, 4]. Возможный способ сделать это заключается в следующем: возьмем резонатор с границей, состоящей из множества малых резонаторов, соединенных с основным резонатором. После выполнения процедуры ограничения, когда число этих малых резонаторов стремится к бесконечности, в результате гомогенизации получается система с управляемым граничным условием. Задача такого типа рассматривалась в [5]. Позже она была исследована в рамках модели точечных окон [6]. Проблеме гомогенизации был посвящен ряд работ [7, 8, 9, 10].

В настоящей работе рассматривается двумерная система из двух резонаторов, разделенных барьером, состоящим из N одинаковых малых резонаторов, соединенных с каждым большим резонатором через небольшие окна с заданной шириной. Наша основная задача - найти асимптотику собственного значения и собственной функции, близких к некоторому собственному значению одного из резонаторов. Эта задача рассматривалась для разных конфигураций системы и граничных условий, однако вопрос о поведении резонансных состояний лапласиана с условием Дирихле на границе для сближающихся отверстий еще не был исследован.

Основная часть

Для решения поставленной задачи используется метод сопоставления асимптотических разложений краевых задач [2, 11, 12]. Схема выглядит следующим образом: мы строим окружности с разными радиусами в центре каждого окна, в них строится внешнее асимптотическое разложение по внешней стороне каждого малого круга и внутреннее асимптотическое разложение по внутренней стороне каждого большого круга. В области между двумя окружностями мы сопоставляем асимптотические разложения. Получаем основные члены асимптотического разложения собственного значения и соответствующей собственной функции, таким образом, мы построим формальное асимптотическое разложение. Следующим шагом является выполнение процедуры ограничения при бесконечном количестве резонаторов. В результате получается, что предел собственной функции удовлетворяет интегральному уравнению на границе, которое соответствует некоторому энергетически зависимому граничному условию, аналогичному дельта-потенциалу.

Выводы

В данной работе строится асимптотика собственного значения лапласиана с условием Дирихле на границе для сближающихся отверстий с помощью метода согласования асимптотических разложений. Результаты работы могут быть использованы для создания метаматериалов с энерго-зависящими граничными условиями, что может быть полезно для управления их свойствами.

Литература

1. J. Behrndt, Elliptic boundary value problems with k-dependent boundary conditions. J. Differential Equations. 249 (2010), 2663-2687.
2. A. Maurel, J.-J. Marigo, J.-F. Mercier, K. Pham, Modelling resonant arrays of the Helmholtz type in the time domain. Proc. R. Soc. A. 474 (2018), 20170894. http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2017.0894
3. X.Ni, K. Chen, M. Weiner, D.J. Apigo, C. Prodan, A. Alu, E. Prodan, A.B. Khanikaev, Observation of Hofstadter buttery and topological edge states in reconfigurable quasi-periodic acoustic crystals. Commun. Phys. 2 (2019), 55. https://doi.org/10.1038/s42005-019-0151-7
4. I.Y. Popov, A model of charged particle on the flat Mobius strip in a magnetic eld. Nanosystems: Phys. Chem. Math., 14 (2023), no. 4, 418-420.
5. G. Cardone, A. Khrabustovskyi, Neumann spectral problem in a domain with very corrugated boundary. J. Differential Equations. 259 (2015) no. 6, 23332367 . https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.03.031
6. I.Yu. Popov, I.V. Blinova, A.I. Popov, A model of a boundary composed of the Helmholtz resonators. ComplexVariables and Elliptic Equations, 66 (2021), no. 8, 1256-1263. https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1751138
7. M.Sh. Birman, T.A. Suslina, Homogenization with corrector term for periodic elliptic differential operators. St. Petersburg Math. J. 17 (2006), 897973.
8. D. Borisov, R. Bunoiu, G. Cardone, Homogenization and asymptotics for a waveguide with an infinite number of closely located small windows. J. Math. Sci. 176 (2011), 774785.
9. L. Schwan, O. Umnova, C. Boutin, J.-P. Groby, Nonlocal boundary conditions for corrugated acoustic metasurface with strong near-eld interactions. Journal of Applied Physics. 123 (2018), 091712. https://doi.org/10.1063/1.5011385
10. V.V. Zhikov, Spectral method in homogenization theory. Proc. Steklov Inst. Math. 250 (2005), 8594.
11. A.M. Il'in, Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems. Nauka, Moscow, 1989 (in Russian); English transl. (Transl. Math. Monographs, 102), Amer. Math. Soc., Providence (1992).
12. A.M. Vorobiev, A.S. Bagmutov, A.I. Popov, On formal asymptotic expansion of resonance for quantum waveguide with perforated semitransparent barrier. Nanosyst. Phys. Chem. Math. 10 (2019), no. 4, 415419.