УДК 519.612.2

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, ВОЗНИКАЮЩИХ В МОДЕЛИРОВАНИИ ТРЕЩИН ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАЗРЫВА ПЛАСТА

Костеров М. А.[1]
Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор Котина Е. Д.[1]
[1]СПБГУ
maxim.kosterov@gmail.com

Введение

Гидравлический разрыв пласта (ГРП) является одной из ключевых технологий в современной добыче нефти. В процессе его применения различные жидкости используются для создания, распространения и поддержания трещины для последующей добычи нефти и усиления притока. Поскольку физика процесса достаточно сложна, а наблюдать трещину напрямую нет возможности, для предсказания ее развития применяют компьютерное моделирование.

В [1] описано решение задачи методом конечных элементов. В нем состояние системы в следующей точке времени определяется предыдущим неявно через нелинейную систему уравнений, которую решают методом Ньютона. В ходе итераций метода Ньютона возникает линейная система, алгоритм решения которой разработан в данной работе. В [1] для ее решения предложено использовать GMRES.

Тестовые задачи были предоставлены Роснефтью в рамках Академического Турнира 2025 [2]. Данные состоят из 551 линейной системы размерностями от 164 до 21110. Задача заключается в нахождении приближенного решения, удовлетворяющего ограничению на невязку.

Основная часть

Будем рассматривать только итеративные методы Крыловского типа [3]. Каждую итерацию они вычисляют произведения матрицы системы на вектор. Поскольку матрицы содержат достаточно много ненулевых элементов (>5%), эти произведения будут занимать основную часть времени решения. Для ускорения алгоритма это время уменьшено с помощью уменьшения количества итераций и оптимизации вычисления произведения разреженной матрицы на вектор.

На количество итераций метода Крыловского типа сильно влияет обусловленность системы. Чтобы ее улучшить, часто используют ILUT [3, 4], однако этот подход будет затратен из-за плотности системы. Поскольку левый нижний блок линейной системы содержит отрицательную трехдиагональ, опустим остальные его элементы, получив матрицу с не более чем 18 ненулевыми элементами в строке. К этой матрице применим ILUT и получим достаточно хороший предобуславливатель, уменьшающий число обусловленности в 100 раз.

В качестве итеративного метода выберем GMRES [3]. Итеративные методы Крыловского типа ищут решение в подпространстве Крылова. GMRES на каждой итерации находит решение с минимальной невязкой, тем самым достигая минимума итераций. Чтобы ограничить затраты на ортогонализацию, будем использовать GMRES с перезапуском после K итераций [3].

Скорость вычисления произведения разреженной матрицы на вектор на современных машинах ограничена не скоростью выполнения самих арифметических операций, а скоростью подгрузки данных к процессору [5]. Поэтому для ускорения этой операции рассмотрим оптимизации, связанные с организацией матрицы в памяти и порядком обхода ее элементов во время вычислений. Введем следующие методы:

1) Блочное представление матрицы [5]. Разреженные матрицы часто хранят в формате Compressed sparse row (CSR). Чтобы уменьшить затраты на хранение индексов, будем хранить ее в формате Block compressed sparse row (BCSR). В нем матрицу делят на блоки небольшого размера и хранят разреженную матрицу таких блоков в формате CSR. В [5] выведена зависимость нижней границы количества промахов в кэше процессора от размера блока и структуры ненулевых элементов матрицы. Выберем размер блока 4x1, поскольку для тестовых матриц нижняя граница количества промахов для него находится в пределах 6% от минимальной и такой размер блока позволяет использовать 256-битные SIMD инструкции.
2) Группировка строк. В ходе вычислений будем группировать по 4 строки блоков и обходить их параллельно: сначала все первые элементы строк, потом все вторые и т. д. Схожий, но более сложный и общий подход описан в [6].
3) Параллелизация. Вычисляемое произведение можно разделить на параллельно выполняемые подзадачи – вычисления произведений одной группы строк на вектор (4 строки блоков, 16 строк матрицы). Если вектор, содержащий результат, выровнен по кэш-линиям, используются 8-байтные числа с плавающей точкой, а кэш-линия имеет размер 64 байта, то каждая подзадача будет записывать только 128 байт памяти, занимающие ровно 2 кэш-линии, избегая тем самым проблем с синхронизацией кэша. В случае другого размера кэш-линии, одну подзадачу можно расширить до двух, четырех и более групп строк.

Выводы

В данной работе разработан оптимизированный метод решения линейных систем, возникающих в моделировании ГРП. Построен эффективный предобуславливатель, сокращающий число итераций примерно в 20 раз. Разработаны различные оптимизации вычисления произведения матрицы на вектор, ускорившие его на 25%. По сравнению с подходом, предложенным в [1], предложенный метод находит решение системы в 20 раз быстрее.

Литература

1. Devloo P. R. B., Fernandes P. D., Gomes S. M., Bravo C. M. A. A., Damas R. G. A finite element model for three dimensional hydraulic fracturing // Mathematics and Computers in Simulation. – 2006. – Vol. 73. – №. 1-4. – P. 142-155.
2. Академический Турнир 2025 [Электронный ресурс] – 2025. – URL: https://events.rn.digital/hack/Academic2025 (дата обращения: 24.02.2026)
3. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. – 2nd edition. – Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. – 547 p.
4. Saad Y. ILUT: a Dual Threshold Incomplete LU Factorization // Numerical Linear Algebra with Applications. – 1994. – Vol. 1 – №. 4 – P. 387-402.
5. Vuduc R., Demmel J. W., Yelick K. A., Kamil S., Nishtala R., Lee B. Performance Optimizations and Bounds for Sparse Matrix-Vector Multiply // SC '02: Proceedings of the 2002 ACM/IEEE Conference on Supercomputing – 2002. – P. 1-35.
6. Im E.-J. Optimizing the Performance of Sparse Matrix-Vector Multiplication: PhD. – Berkeley, 2000. – 118 p.