

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЯЗАННЫХ РЕЗОНАТОРОВ СО СЛОЖНОЙ ГРАНИЕЙ НА БАЗЕ ТЕОРИИ РАСШИРЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ

Разин С. С.¹

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, профессор Попов И. Ю.

¹Университет ИТМО

Введение

Резонаторы Гельмгольца широко применяются для управления волновыми процессами в акустике, наноэлектронике и метаматериалах. Особый интерес представляют системы с большим числом резонаторов, присоединённых к границе области, поскольку они формируют эффективные граничные условия, отличные от стандартных условий Неймана и Дирихле.

В отечественных [1] и зарубежных [2] работах изучаются как отдельные резонаторы, так и их периодические решётки, в том числе в рамках теории метаматериалов и задач шумоподавления [3]. Однако, остаётся актуальной проблема строгого математического описания предельного перехода от дискретной системы резонаторов к непрерывному граничному условию при стремлении их числа к бесконечности.

В работе рассматривается оператор Лапласа с условиями Неймана в квадратной области, возмущённой системой резонаторов Гельмгольца, присоединённых вдоль одной из границ через узкие каналы. Преследуемая нами цель — установление связи между дискретной моделью и непрерывной граничной задачей.

Основная часть

Предлагаемая модель возмущённой границы представляет собой большое число резонаторов, каждый из которых соединяет две квадратные области, вдоль их общей границы, одномерным каналом.

Для упрощения анализа используется приближённая модель точечных отверстий [4]: реальные отверстия малого диаметра заменяются на точечные, а взаимодействие областей описывается через самосопряжённые расширения симметрического оператора Лапласа [5]. Пропускная способность каналов учитывается с помощью параметра расширения, связанного с физическими размерами отверстий.

На основе асимптотик функции Грина строится сопряжённый оператор и вводятся условия сшивки, обеспечивающие сохранение потока через каналы (условия Кирхгофа). Это позволяет корректно задать самосопряжённый оператор, описывающий систему «область + резонаторы».

Далее анализируется предельный случай, когда число резонаторов стремится к бесконечности, а расстояние между ними — к нулю. Показано, что дискретная модель с точечными соединениями аппроксимирует задачу Лапласа с непрерывным граничным условием на соответствующей общей границе двух квадратных областей.

Таким образом, предлагается метод перехода от сложной геометрии с множеством резонаторов к более простой непрерывной задаче, без использования формул, таблиц и рисунков, но с сохранением физического смысла системы.

Выводы

Построена математическая модель системы с резонаторами Гельмгольца в виде самосопряжённого оператора Лапласа с условиями сшивки. Установлено, что при большом числе резонаторов дискретная система приводит к непрерывному граничному условию.

Практическая значимость результатов состоит в возможности моделирования сложных поверхностей метаматериалов с помощью эффективных граничных условий, возможности оптимизирования параметров резонаторов для задач шумоподавления и фильтрации волн, а также, упрощения численных расчётов при замене геометрии с

множеством резонаторов на эквивалентную задачу с модифицированным граничным условием. Результаты могут быть использованы при проектировании акустических покрытий и волноводных структур.

Литература

1. Borisov D, Pankrashkin K. Quantum waveguides with small periodic perturbations: gaps and edges of Brillouin zones // J Phys A. 2013. V.46(23) P.235203.
2. Hempel R, Seco L, Simon B. The essential spectrum of Neumann Laplacians on some bounded singular domains // J Funct Anal. 1991. V.102. P.448-483.
3. S. Huang, X. Fang, X. Wang, Badreddine Assouar, Qian Cheng, and Yong Li, Acoustic perfect absorbers via Helmholtz resonators with embedded apertures // The Journal of the Acoustical Society of America. 2019. V. 145. P. 254.
4. I.Yu. Popov, Extension theory and localization of resonances for domains of trap type // Mat Sb. 1990. V. 181(10). P. 1366-1390.
5. M.S. Birman, M.Z. Solomyak, Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1986.