

## СТРУКТУРА ВЕСОВ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ НА НЕБОЛЬШИХ НАБОРАХ ДАННЫХ: ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Вавилов П.Д.<sup>1</sup>, Томилов И.В.<sup>1</sup>

Научный руководитель – канд. техн. наук, доцент Гусарова Н.Ф.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Университет ИТМО

p.brnk@yandex.ru

### Введение

Структура весов нейронной сети играет ключевую роль в определении способности модели к обучению и обобщению. Классическая работа [1] положила начало изучению этой зависимости, активно продолжающемуся до сих пор [2]. Для оценки структуры весов были предложены различные подходы: [3] использует нормы и степенное распределение собственных значений весовых матриц; [4] анализирует их распределение при переносе обучения; [5] измеряет относительное изменение весов по слоям; [6] оценивает корреляцию асимметрии и эксцесса с точностью модели. Тяжёлые хвосты распределений изучаются в [7], а [8] обобщает спектральные свойства через высокотемпературный ансамбль Марченко-Пастура.

Однако топология обычно применяется к модели целиком, без разбивки по слоям, а эксперименты ограничены академическими наборами данных (MNIST, CIFAR-10 и др.). Эффективность нейронной сети сильно зависит от объёма обучающей выборки [9], что неизбежно отражается на структуре весов. Это критически важно для задач с ограниченными данными (редкие заболевания, анализ поведения потребителей). В доступной литературе эта зависимость изучена лишь косвенно и противоречиво: [10] связывает меньшую обучающую выборку с меньшей спектральной нормой и слабыми тяжёлыми хвостами, а [11] – с ростом эксцесса и асимметрии. Системных исследований связи топологических характеристик весового пространства нейронных сетей и её эффективности при малом объёме данных нами не было обнаружено. В данной работе изучается связь топологических метрик сложности весового пространства с эффективностью нейронной сети, а также изменение этой сложности по слоям в зависимости от объёма обучающей выборки и времени обучения модели.

### Основная часть

Топологический анализ данных – это направление прикладной топологии, которое направлено на изучение топологической структуры дискретных облаков точек. Для анализа подобных облаков точек строится фильтрация симплициальных комплексов, позволяющая исследовать структуру данных на различных масштабах. На каждом масштабе вычисляются группы гомологий, образующие в совокупности устойчивые гомологии. Устойчивые гомологии визуализируются в виде баркодов – наборов пар моментов рождения и исчезновения топологических признаков.

В работе используются две топологические метрики: нормализованная персистентная энтропия и среднее время жизни гомологий, рассчитанные для нулевой размерности. Нормализованная персистентная энтропия характеризует равномерность времени существования топологических признаков и отражает сложность структуры данных: чем выше значение метрики, тем менее структурировано облако точек. Среднее время жизни гомологий оценивает устойчивость топологических характеристик и позволяет определить масштаб их существования.

Так как работа полносвязной нейронной сети основана на последовательном применении матричных преобразований и нелинейных активационных функций, структура обучающей выборки отражается в топологии пространства весов сети. В связи с этим предлагается оценивать сложность слоёв нейронной сети через топологические характеристики облаков точек, сформированных весами нейронов.

### **Выводы**

Проведено исследование эволюции топологических характеристик весовых матриц нейронных сетей в процессе обучения и их связи с качеством ответов модели. Выявлена корреляция между нормализованной персистентной энтропией, средним временем жизни гомологий и точностью моделей. Установлено неравномерное изменение структуры весов различных слоёв в процессе обучения. Результаты исследования могут быть использованы для создания нового топологического оптимизатора обучения нейронных сетей.

### **Литература**

1. Sutskever I., et al. On the importance of initialization and momentum in deep learning. Proceedings of the 30th International Conference on Machine Learning, Atlanta, Georgia, USA, 2013. JMLR: W&CP volume 28.
2. Jacot A., Gabriel F., Hongler C. Neural Tangent Kernel: Convergence and Generalization in Neural Networks. <https://arxiv.org/abs/1806.07572>. 20 Jun 2018
3. Martin C.H., Peng T., Mahoney M.W. Predicting trends in the quality of state-of-the-art neural networks without access to training or testing data. Nature Communications (2021) 12:4122 [doi.org/10.1038/s41467-021-24025-8](https://doi.org/10.1038/s41467-021-24025-8)
4. Ba Y., Mancenido M.V., Pan R. How Does Data Diversity Shape the Weight Landscape of Neural Networks? <https://arxiv.org/abs/2410.14602>. 18 Oct 2024
5. Agrawal A.M., et al. WeightScale: Interpreting Weight Change in Neural Networks. IJERT, Volume 11, Issue 09 (September 2022),
6. Hasan Md.S., Alam R., and Adnan M.A. Neuro-Scientific Analysis of Weights in Neural Networks. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence. Vol. 35, No. 14, 2152021 (2021).
7. Xiao X., et al. Heavy-Tailed Regularization of Weight Matrices in Deep Neural Networks. <https://arxiv.org/abs/2304.02911>. 6 Apr 2023
8. Hodgkinson L., Wang Z., Mahoney M.W. Models of Heavy-Tailed Mechanistic Universality. <https://arxiv.org/abs/2506.03470>. 4 Jun 2025.
9. D'souza R.N., Huang P.Y. & Yeh F.C. Structural Analysis and Optimization of Convolutional Neural Networks with a Small Sample Size. Sci Rep 10, 834 (2020). <https://doi.org/10.1038/s41598-020-57866-2>
10. Wang Z., et al. Spectral Evolution and Invariance in Linear-Width Neural Networks. NIPS '23: Proceedings of the 37th International Conference on Neural Information Processing Systems. Article No.: 909, Pages 20695 – 20728
11. Zhang B., He Z., Lin H. A comprehensive review of deep neural network interpretation using topological data analysis. Neurocomputing. Volume 609, 7 December 2024, 128513