

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПРИ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИИ С ДУГИ ГРАНИЦЫ

Рыбинская З. В.¹, Поправка И. С.¹

Научный руководитель – д. ф.-м. н., профессор Попов И. Ю.¹

¹Университет ИТМО

zltrbn@gmail.com

Введение

Задача аналитического продолжения функции по её значениям на части границы области является одной из классических проблем комплексного анализа и теории аппроксимации. Особый интерес представляет построение полиномов, приближающих аналитическую функцию внутри области, если известны лишь её значения на фиксированной дуге границы.

Одним из подходов к решению данной задачи является использование интегральных конструкций типа формулы Карлемана [1] и её дальнейших обобщений в комплексном анализе [2], позволяющих восстанавливать значения аналитической функции по граничным данным. В рамках этого подхода строится последовательность аппроксимирующих полиномов, сходящихся к функции равномерно на компактах области.

Основная часть

В теоретической части рассматривается построение полиномов, приближающих функцию, аналитическую в ограниченной односвязной области и непрерывную на фиксированной дуге её границы. Аппроксимация осуществляется по значениям функции только на этой дуге и основана на интегральной конструкции, аналоге формулы Карлемана, позволяющей восстанавливать значения аналитической функции внутри области по граничным данным.

В работе реализована численная модель полиномиальной аппроксимации аналитической функции по значениям на фиксированной дуге границы области. Метод основан на интегральной конструкции с использованием специального ядра и гасящего множителя. Теоретический анализ данной схемы показывает, что при увеличении степени аппроксимирующего полинома обеспечивается сходимость последовательности внутри области с заданной скоростью.

В рамках исследования выполнена программная реализация всех этапов алгоритма: построение вспомогательного отображения, вычисление нормировочных коэффициентов, численное интегрирование и анализ поведения погрешности в граничных и внутренних точках области. Проведённые вычислительные эксперименты позволили проследить динамику изменения ошибки при росте степени полинома.

Полученные результаты подтвердили общую тенденцию уменьшения погрешности при увеличении степени аппроксимации, что согласуется с теоретическими выводами. Вместе с тем установлено, что достижение высокой точности требует существенного увеличения степени полинома, что приводит к росту вычислительной сложности и усилению влияния численных эффектов.

Дополнительный анализ показал, что существенную роль играет характер интегрального ядра. Наличие множителя с высокой степенью синуса обуславливает выраженную осциллируемость подынтегральной функции, что при фиксированной схеме численного интегрирования приводит к накоплению вычислительной погрешности. Таким образом, выявленные отклонения связаны не с теоретической несостоятельностью метода, а с особенностями его практической реализации.

Полученные результаты позволили определить вычислительные ограничения алгоритма и наметить направления дальнейшего исследования, связанные с повышением устойчивости интегрирования и оптимизацией параметров аппроксимации.

Выводы

В работе исследована интегральная схема восстановления аналитической функции по граничным данным. Теоретический анализ подтверждает сходимость метода с заданной скоростью при увеличении степени аппроксимирующего полинома.

Численная реализация продемонстрировала согласование с теоретической тенденцией сходимости, однако показала, что для достижения высокой точности требуется увеличение степени полинома, что влечёт за собой рост вычислительных затрат и усиление влияния численных эффектов.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о практических особенностях применения метода и определяют направления дальнейших исследований, связанных с повышением вычислительной устойчивости алгоритма.

Литература

1. Carleman T. Les fonctions quasianalytiques. – Paris: Gauthier-Villars. 1926. 3 с.
2. Айзенберг Л. А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние. 1990. 248 с.