УДК 517.957

О нелинейном трехкомпонентном уравнение Шредингера.

Анисимов И.В.(ИТМО)
Научный руководитель – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник НОЦМ Попов И.Ю. (ИТМО)

Введение. В настоящее время активно исследуются нелинейные явления в различных областях науки и техники. Многие физические задачи о нелинейных волнах, описываются с помощью математических моделей, выраженных нелинейными интегрируемыми дифференциальными уравнениями в частных производных, имеющие особые частные решения, которые называются солитонами. В большинстве своем интегрируемые нелинейные дифференциальные уравнения принадлежат какой-либо иерархии. Примерами могут послужить иерархия Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегюра [4], а также иерархии уравнения Кортевега-де-Фриза (КдФ) [1,2] и модифицированного уравнения Кортевега–де–Фриза мКдФ) [3]. Отличительной особенностью этих уравнений является то, что для их исследования разработан математический аппарат, позволяющий аналитически вычислять бесконечные серии частных решений.

Научная и практическая значимость построения и исследования новых иерархий многокомпонентных интегрируемых нелинейных уравнений позволит ввести в научный оборот новые модели в нелинейной оптике, физике плазмы и гидродинамике.

Основная часть. В линейной динамической системе последующее состояние однозначно предсказывается по предыдущему, а в нелинейных случаях поведение динамических систем зависит от типа нелинейности. Большинство нелинейных явлений можно разделить на две группы: слабые и сильные нелинейные явления. Системы со слабой нелинейностью достаточно хорошо исследованы. Для них существуют аналитические методы, на основе которых разработаны эффективные алгоритмы для решения прикладных задач. Слабые нелинейные явления обычно моделируются в рамках теории возмущений линейных динамических систем. Динамические системы, обладающие сильной нелинейностью, как правило делятся на две группы: модели динамического хаоса и интегрируемые нелинейные модели. Примеры динамического хаоса позволяют говорить о случайном поведение фазовых портретов детерминированных систем. Причиной возникновения непредсказуемого поведения, является неустойчивость системы по отношению к начальным условиям. Слабые изменения начальных условий со временем приводит к неограниченному изменению динамики системы. В отличие от систем с динамическим хаосам поведение интегрируемых нелинейных динамических систем полностью предсказуемо.

Интегрируемые нелинейные дифференциальные уравнения получаются из условий совместности двух линейных дифференциальных операторов матричных или скалярных, которые называются парой Лакса. Наибольшее количество интегрируемых нелинейных уравнений получаются из условий совместности матричных линейных дифференциальных операторов.

Обсудим нелинейные уравнения Шредингера. Самая первая форма — это его скалярный вид. Для него известна своя пара Лакса, которая была получена в работе [6]. Позже было обнаружено, что это уравнение является первым членом бесконечной последовательности уравнений, называемой иерархией Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегюра. Вторым уравнением этой иерархии является модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза. Другие уравнения из этой иерархии также хорошо известны, но сейчас не представляют интереса (см., например, [6,7]). Чуть позже в работе [7] нелинейное скалярное уравнение было обобщенно на случай двух компонент. Нетрудно понять, что это уравнение уже относится к новой иерархии [8, 9].

В нашей работе рассматриваются трехкомпонентное уравнение Шредингера. Для исследования спектральных характеристик нелинейных дифференциальных уравнений используется два метода. Первый метод связан с именем математика Дубровина В этом подходе рассматривается матричная пара Лакса. И дальше из условия совместности операторов получаются эволюционные интегрируемые уравнения. Стационарные уравнения вытекают из уравнения на матрицу монодромии, а спектральные кривые получаются как характеристические уравнения на матрицу монодромии.

Второй метод - это классический способ для задач математической физике, который называется обратная задача рассеяния. В основе метода лежит представление исследуемого нелинейного уравнения в виде условия совместности пары Лакса.

Вывод. Целью этой работы мы ставили перед собой получить спектральные кривые, используя обратную задачу рассеяния для трехкомпонентного уравнения Шредингера, и сравнить их с спектральными кривыми, которые получены при помощи метода Дубровина. Предполагаем, что должно быть взаимно-однозначное отображение между спектральными кривыми, которые получены двумя разными способами.

Список использованных источников:

Дубровин, Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения / Б.А. Дубровин // Успехи математических наук, - 1981. Т.36, №2. – С.11-80.

Михалев, В.Г. О гамильтоновых формализме иерархий типа Кортевега-де-Фриза / В.Г Михалев // Функц. анализ и его прил. – 1992. Т.26, №2. – С.79-82

3. Miura, R. Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion / R. Miura, C. Gardner, M. Kruskal // J. Math. Phys. – 1968. Vol.9. – P.1205-1209.

4. Ablowitz, M. J. The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems / M. J. Ablowitz ,D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur // Studies in Appl. Math. – 1974. Vol.53, No.4. – P.249-315.

5. Manakov, S. V. On the theory of two-dimensional stationary self-focussing of electromagnetic waves / S.V. Manakov // Sov. Phys. JETP. – 1974. Vol 38, No.2. – P.248-253.

6. Zakharov, V. E. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of nonlinear waves in nonlinear media / V.E. Zakharov, A.E. Shabat // Sov. Phys. JETP. – 1971. Vol 34. – P.62-69.

7. Daniel, M. On the integrable models of the higher order water wave equation / M. Daniel, K. Porsezian, M. Lakshmanan // Phys. Lett. A. – 1993. Vol 174, No.3. – P.237-240.

8. Warren, O. H. The vector nonlinear Schr¨odinger hierarchy / O. H. Warren, J. N. Elgin //

Physica D. – 2007. Vol 228, No.2. – P.166-171.

9. Smirnov, A. O. From generalized Fourier transforms to spectral curves for the Manakov hierarchy. II. Spectral curves for the Manakov hierarchy / A. O. Smirnov, V. S. Gerdjikov, V. B. Matveev // Eur. Phys. J. Plus. – 2020. Vol 135 – P.561.