

Решение дифференциальных уравнений в частных производных с использованием квантовых компьютеров

Чирков Д.А (ИТМО)

Научный руководитель – кандидат физико-математических наук Лобанов И.С. (ИТМО)

Введение. Трудно переоценить значимость дифференциальных уравнений в современной науке. С помощью ДУ описывают: механические колебания, распространение тепла, электромагнитные поля, динамику жидкостей и газов, биологические процессы, экономические модели и многое другое[1].

Однако большая часть дифференциальных уравнений не имеет аналитического решения, то есть решение не может быть выражено в квадратурах. Такие задачи могут быть решены только численными методами, такими как метод Эйлера, метод Рунге-Кутты. Эти методы позволяют аппроксимировать решение с необходимой точностью, что делает их незаменимыми в инженерных расчетах, моделировании природных процессов и разработке компьютерных симуляций. Современные вычислительные мощности и специализированные алгоритмы позволяют решать даже сложные нелинейные системы. Однако при увеличении размеров системы или желаемой точности так же увеличивается время расчетов и количество необходимой памяти. Для решения этой проблемы могут быть полезны квантовые компьютеры.

Основная часть. Для представления дифференциальных уравнений на квантовом компьютере используют два основных подхода: сведение дифференциального уравнения к системе линейных уравнений с помощью дискретизации уравнения и сведение решаемого уравнения к форме уравнения Шредингера.

В работе Хэрроу, Хассидима, Ллойда[2] теоретически было продемонстрировано, что система линейных алгебраических уравнений может быть решена на квантовом компьютере за логарифмическое время. Были получены улучшения[3] алгоритма улучшающие изначальную сложность. Однако практическая реализация данного алгоритма является крайне трудной задачей. На данный момент были предприняты попытки реализации данного алгоритма в железе для систем 2×2 , 8×8 [4]. Решение данного уравнения хранится в амплитудах квантового состояния, что делает результат вычислений трудно доступным в классическом мире. Для получения решения в классическом смысле необходимо произвести затратную процедуру квантовой томографии.

Вторым распространенным подходом к решению ДУ является сведения уравнению к форме уравнения Шредингера, или Шрёдингеризация(Schrodingerisation). Этот подход предполагает сведения уравнение к виду уравнения Шрёдингера. Рассматривается применение данного подхода для решения уравнений переноса и волнового уравнения уравнения[5]. Оба уравнения являются уравнением в частных производных гиперболического типа, однако имеют различные подходы к решению на квантовом компьютере. Так же данный подход применяется к уравнениям эллиптического типа, таким как уравнение Пуассона[6]. Особенностью таких уравнений является отсутствие производной по времени и требует иных подходов к решению. Таких как сведению к системе и решению системы с помощью Гамильтоновой симуляции[7]. Параболические уравнения требуют отдельного подхода. Для их решения необходимо ввести новую переменную, которая позволит свести такие уравнения к уравнению Шрёдингера без перехода к мнимому времени, поскольку введение мнимого времени ведет к иной, по сравнению с изначальным уравнением, эволюции системы[8].

Выводы. Проведен анализ возможности решения уравнений в частных производных с использованием квантового компьютера. Было обнаружено, что для разных типов уравнений

в частных производных применяются различные методы решения. Актуальной задачей в сфере квантовых вычислений является разработка единого универсального подхода, объединяющего эти методы.

Список использованных источников:

1. Klainerman S. PDE as a unified subject //Visions in Mathematics: GAFA 2000 Special Volume, Part I. – Basel : Birkhäuser Basel, 2010. – С. 279-315.
2. Harrow A. W., Hassidim A., Lloyd S. Quantum algorithm for linear systems of equations //Physical review letters. – 2009. – Т. 103. – №. 15. – С. 150502.
3. Lin L., Tong Y. Optimal polynomial based quantum eigenstate filtering with application to solving quantum linear systems //Quantum. – 2020. – Т. 4. – С. 361.
4. Wen J. et al. Experimental realization of quantum algorithms for a linear system inspired by adiabatic quantum computing //Physical Review A. – 2019. – Т. 99. – №. 1. – С. 012320.
5. Sato Y. et al. Hamiltonian simulation for hyperbolic partial differential equations by scalable quantum circuits //Physical Review Research. – 2024. – Т. 6. – №. 3. – С. 033246.
6. Childs A. M., Liu J. P., Ostrander A. High-precision quantum algorithms for partial differential equations //Quantum. – 2021. – Т. 5. – С. 574.
7. Childs A. M., Kothari R., Somma R. D. Quantum algorithm for systems of linear equations with exponentially improved dependence on precision //SIAM Journal on Computing. – 2017. – Т. 46. – №. 6. – С. 1920-1950.
8. Jin S., Liu N., Yu Y. Quantum simulation of partial differential equations: Applications and detailed analysis //Physical Review A. – 2023. – Т. 108. – №. 3. – С. 032603.