

**Введение.** Помимо привычных решений волнового уравнения в свободном пространстве с заданным волновым вектором в парааксиальном приближении существует так называемый структурированный свет. Например, для случая Лагерр-Гауссовых мод квантовыми числами выступают орбитальный угловой момент и перпендикулярная и продольная проекции волнового вектора. В то же время уравнение Шрёдингера для свободной частицы имеет такую же форму, как и волновое уравнение в парааксиальном приближении. Поэтому оказывается, что закрученные электроны также существуют и их можно создать на эксперименте. С точки зрения теории принципиальное отличие закрученных электронов от закрученных фотонов заключается в наличии электрического заряда, а значит и возможности взаимодействия с внешним электромагнитным полем. Отличие в свойствах может привести к новым эффектам, которые представляют интерес для исследования.

**Основная часть.** В настоящей работе показывается, что в случае распространения закрученного электрона в продольном нестационарном магнитном поле в соленоиде круглого сечения происходят осцилляции поперечного размера волнового пакета. Для этого выполняется построение оператора эволюции аналитически с помощью идей теории дифференциальных уравнений Арнольда [1]

Из теоремы о возможности локального выпрямления фазовых траекторий следует эквивалентность между затухающим одномерным гармоническим осциллятором и одномерной свободной частицей. Под эквивалентностью подразумевается возможность получить решение одной задачи из решения другой посредством замены координат и времени. Оказывается возможным обобщить эту идею и показать эквивалентность между затухающим квантовым одномерным осциллятором и квантовой одномерной свободной частицей. Затухание в гамильтониан для удобства вводится в модели Калдиरोлы-Канаи [2].

Цилиндрическая симметрия позволяет сохранить однопараметричность задачи и с помощью композиции преобразований по  $x$  и  $y$  показать эквивалентность между собой двумерных затухающих квантовых осцилляторов с произвольной зависимостью параметров (частоты и фактора затухания) от времени. Однако в исходной задаче распространения закрученного электрона в магнитном поле гамильтониан представляет собой двумерный осциллятор со связью  $\omega(t) L_z$ , где  $L_z = y p_x - x p_y$  – оператор  $z$ -проекции орбитального углового момента.

Оказывается эффективным добавить в рассмотрение связь с помощью формализма Т-экспонент. Оператор  $\omega(t) L_z$  коммутирует в произвольный момент времени с оставшейся симметричной частью гамильтониана, поэтому эволюцию под его действием можно рассматривать независимо. В то же время оператор связи коммутирует сам с собой, поэтому соответствующая экспонента с временным упорядочиванием становится обычной операторной экспонентой. Таким образом, оператор эволюции закрученного электрона в симметричной магнитной системе представляет собой композицию трёх операторов – операторной экспоненты с  $\omega(t) L_z$ , оператора унитарной эквивалентности гамильтонианов без связи и обратной операторной экспоненты с  $\omega(t) L_z$ .

Важно, что весь оператор эволюции удаётся задать одним параметром, который по построению должен удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению Ермакова-Пинни [3]. Физический смысл этого параметра прост – это безразмерная ширина волнового пакета, а уравнение Ермакова-Пинни для случая отображения системы на саму себя – уравнение на эволюцию размера волнового пакета. С помощью численного

вычисления можно увидеть, что размер волнового пакета в магнитной системе осциллирует. Это является интересным результатом данной работы, так как до сих пор экспериментов по наблюдению подобных осцилляций не производилось.

**Выводы.** Получен явный вид оператора эволюции для закрученного электрона в симметричном нестационарном магнитном поле [4]. Предсказан эффект осцилляции размера волнового пакета закрученного электрона в продольном магнитном поле. Теоретическое описание позволяет предсказать поведение состояния в любой системе соосных соленоидов круглого сечения. Это ещё один шаг к теоретическому описанию динамики волновых пакетов в ускорителе закрученных частиц.

#### **Список использованных источников:**

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: МЦНМО, 2012. — С. 344.
2. Kanai E. On the Quantization of the Dissipative Systems // Progress of Theoretical Physics. — 1948. — Дек. — Т. 3, № 4. — С. 440–442.
3. Pinney E. The nonlinear differential equation  $\ddot{y} + p(x)y + cy^{-3} = 0$  // Proc.Amer. Math. Soc. — 1950. — Т. 1, № 5. — С. 681–681.
4. N. V. Filina and S. S. Baturin, “Unitary equivalence of twisted quantum states,” Phys. Rev. A, vol. 108, p. 012219, Jul 2023.