УДК 517.9

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДРОБНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зацепин Д.К. (ИТМО)

Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, Борель Л.В. (ИТМО)

Введение. Задачи, в которых присутствуют уравнения дробного порядка с малым параметром при дробной производной, встречаются в реологии, биомедицинской инженерии и ряде процессов математической физики [1]. Сингулярно возмущённые уравнения характеризуются появлением «пограничных слоёв» и резкими изменениями решения вблизи отдельных точек при стремлении малого параметра к нулю. Это приводит к тому, что стандартные методы (схема Эйлера или Рунге–Кутты) требуют значительного увеличения числа шагов по сетке. Поэтому в мировой практике [2] ведутся исследования по созданию специализированных численных методов, которые учитывают особенности сингулярного возмущения и дробного оператора, в частности производной Капуто.

Основная часть. В данной работе рассматриваются несколько подходов к численному решению сингулярно возмущённых дробных дифференциальных уравнений в формулировке Капуто. Особое внимание уделено:

1) L1-схеме с градуированной сеткой. Данный метод основывается на прямой разностной аппроксимации свёрточного интеграла, характерного для дробной производной Капуто, и позволяет учитывать возможные пограничные слои вблизи начала интервала.

2) L2-схеме и схожим многошаговым методам, которые отличаются выбором интерполяции при аппроксимации интеграла. Они могут обеспечивать более высокую формальную точность, но требуют тщательного анализа устойчивости, особенно при малом параметре.

3) Спектрально-разностным методам. В рамках подхода предлагается реализация, сочетающая полиномиальные приближения и специфические веса, корректирующие погрешность при t стремящейся к 0. Такое сочетание позволяет локально «подстраивать» сетку и базис для более точного представления решения.

Для всех перечисленных методов важным моментом является выбор специальной неравномерной сетки (чаще всего степенной), которая сгущается у начала отрезка решения. Это даёт возможность эффективно учесть резкое изменение решения в малой окрестности t при значении 0, где часто формируется пограничный слой.

Выводы. В ходе проведённого анализа рассмотрены вопросы устойчивости, апостериорной оценки погрешностей и вычислительной сложности. Показано, что при правильно подобранной сетке удаётся достичь существенного выигрыша в точности для сингулярно возмущённых уравнений по сравнению с традиционными методами, не адаптированными к особенностям дробной производной и малому параметру.

Список использованных источников:

1. Podlubny I. Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1999.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.