

**УСТОЙЧИВОЕ ОБУЧЕНИЕ МОДЕЛЕЙ  
В ФОРМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ПО ДАННЫМ НАБЛЮДЕНИЙ**

**Титов Р.В. (ИТМО)**

**Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, Хватов А.А.  
(ИТМО)**

**Введение.** Обучение моделей в форме дифференциальных уравнений является привлекательным инструментом машинного обучения, особенно в приложениях, связанных с природой. Это связано прежде всего с тем, что такие модели, получаемые на основе физических данных, имеют более компактный и интерпретируемый вид. Существуют различные алгоритмы [1, 2], результаты которых представляют собой набор коэффициентов при слагаемых из predetermined библиотеки, где каждое слагаемое является дифференциальным оператором или произведением дифференциальных операторов. Эти подходы обладают ограничением, т.к. предполагают, что уравнение может быть описано исключительно слагаемыми, присутствующими в predetermined библиотеке. Это становится недостаточным в случаях, когда процесс полностью или частично неизвестен. В подобных задачах применяются алгоритмы, основанные на эволюционной оптимизации [3-6], которые менее требовательны к количеству априорных предположений и тем самым обеспечивают более широкое пространство поиска.

**Основная часть.** В настоящей работе исследуются предпосылки и инструменты для независимого поиска уравнений без участия экспертов, что исключает необходимость в предположениях о форме уравнения. Для перехода от задачи восстановления к поиску дифференциальных уравнений, то есть рассматривая вариант, когда форма уравнений неизвестна требуется учитывать неопределенность, в получаемой структуре модели, включая коэффициенты и слагаемые уравнения, так и в пространстве данных, на которых модель обучается. Это связано с тем, что неопределенность всегда присутствует в реальных процессах, а источником неопределенности могут быть, например, неправильные предположения, сделанные при обучении модели, зашумленные или неточные данные. Предлагается подход для устойчивого обучения модели в форме дифференциальных уравнений по данным с учетом неопределенности, который объединяет три различных алгоритма, такие как, алгоритм поиска дифференциальных уравнений [6], алгоритм определения структуры совместного распределения в виде байесовской сети [7], алгоритм автоматизированного решения дифференциальных уравнений, основанного на нейронных сетях [8].

**Выводы.** На основе подхода разработан программный компонент и для иллюстрации его работы проведены численные эксперименты на различных задачах, включая поиск систем обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных [9].

**Список использованных источников:**

1. Brunton, S. L., Proctor, J. L. and Kutz, J. N. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the national academy of sciences* 113, 3932—3937 (2016).
2. Brunton, S. H., Brunton, S. L., Proctor, J. L. and Kutz, J. N. Data-driven discovery of partial differential equations. *Science advances* 3, e1602614 (2017).
3. Atkinson, S., Subber, W., Wang, L., Khan, G., Hawi, P. and Ghanem, R. Data-driven discovery of free-form governing differential equations. *arXiv preprint arXiv:1910.05117* (2019).

4. Chen, Y., Luo, Y., Liu, Q., Xu, H. and Zhang, D. Symbolic genetic algorithm for discovering open-form partial differential equations (SGA-PDE). *Physical Review Research* 4, 023174 (2022).
5. Xu, H., Chang, H. and Zhang, D. DLGA-PDE: Discovery of PDEs with incomplete candidate library via combination of deep learning and genetic algorithm. *Journal of Computational Physics* 418, 109584 (2020).
6. Maslyaev, M., Hvatov, A. and Kalyuzhnaya, A. Partial differential equations discovery with EPDE framework: Application for real and synthetic data. *Journal of Computational Science* 53, 101345 (2021).
7. Deeva, I., Bubnova, A. and Kalyuzhnaya, A. Advanced approach for distributions parameters learning in Bayesian networks with Gaussian mixture models and discriminative models. *Mathematics* 11, 343 (2023).
8. Hvatov, A. Automated differential equation solver based on the parametric approximation optimization. *Mathematics* 11, 1787 (2023).
9. Хватов А.А., Титов Р.В. О задаче устойчивого поиска дифференциальных уравнений // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления - 2023. - Т. 514. - № 2. - С. 109-117.