УДК 517.957

О скалярной паре Лакса для модифицированного уравнения Кортевега-де-Фриза

Анисимов И.В.(СПБГУАП)
Научный руководитель – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой Смирнов А.О. (СПБГУАП)

Введение. В настоящее время активно исследуются нелинейные явления в различных областях науки и техники. Многие физические задачи о нелинейных волнах, описываются с помощью математических моделей, выраженных нелинейными интегрируемыми дифференциальными уравнениями в частных производных, имеющие особые частные решения, которые называются солитонами. В большинстве своем интегрируемые нелинейные дифференциальные уравнения принадлежат какой-либо иерархии. Примерами могут послужить иерархии уравнения Кортевега-де-Фриза (КдФ) [1,2] и модифицированного уравнения Кортевега-де-Фриза (мКдФ) [3]. Отличительной особенностью этих уравнений является то, что для их исследования разработан математический аппарат, позволяющий аналитически вычислять бесконечные серии частных решений. Одним из таких подходов, может быть, метод построения многофазных решений, ассоциированных со спектральными кривыми.

Научная и практическая значимость построения и исследования новых иерархий многокомпонентных интегрируемых нелинейных уравнений позволит ввести в научный оборот новые модели в нелинейной оптике, физике плазмы и гидродинамике.

Основная часть. В линейной динамической системе последующее состояние однозначно предсказывается по предыдущему, а в нелинейных случаях поведение динамических систем зависит от типа нелинейности. Большинство нелинейных явлений можно разделить на две группы: слабые и сильные нелинейные явления. Системы со слабой нелинейностью достаточно хорошо исследованы. Для них существуют аналитические методы, на основе которых разработаны эффективные алгоритмы для решения прикладных задач. Слабые нелинейные явления обычно моделируются в рамках теории возмущений линейных динамических систем. Динамические системы, обладающие сильной нелинейностью, как правило делятся на две группы: модели динамического хаоса и интегрируемые нелинейные модели. Примеры динамического хаоса позволяют говорить о случайном поведение фазовых портретов детерминированных систем. Причиной возникновения непредсказуемого поведения, является неустойчивость системы по отношению к начальным условиям. Слабые изменения начальных условий со временем приводит к неограниченному изменению динамики системы. В отличие от систем с динамическим хаосам поведение интегрируемых нелинейных динамических систем полностью предсказуемо.

Интегрируемые нелинейные дифференциальные уравнения получаются из условий совместности двух линейных дифференциальных операторов матричных или скалярных, которые называются парой Лакса. Наибольшее количество интегрируемых нелинейных уравнений получаются из условий совместности матричных линейных дифференциальных операторов. В частности, для модифицированного уравнения Кортевега-де-Фриза хорошо известна матричная форма оператора пары Лакса с матрицами второго порядка [3]. Оператор Лакса является линейным дифференциальным уравнением первого порядка с линейной матрицей второго порядка по спектральному параметру. Нетрудно понять, что матричный линейный оператор может быть сведен к линейному скалярному дифференциальном оператору второго порядка с квадратичным спектральным параметром. Полученная скалярная пара Лакса похожа на пару Лакса для уравнения Каупа-Буссинеска [4 – 6], но, в отличие от нее, зависит от одной функции, а не от двух. Отметим также, что могут рассматриваться разные скалярные пары Лакса и для уравнения Кортевега-де Фриза [1,2]. В таком случае, имеется связь между матричным и скалярным представлениями пары Лакса для уравнения мКдФ.

Существуют разные методы вычисления основных характеристик для скалярной и матричной пары Лакса В случае рассмотрения матричной пары Лакса из условия совместности операторов получаются эволюционные интегрируемые уравнения. Спектральные кривые получаются как характеристические уравнения на матрицу монодромии, а стационарные уравнения вытекают из уравнения на матрицу монодромии. Для скалярных линейных дифференциальных операторов спектральная кривая получается из уравнения на произведение двух собственных функций оператора второго порядка. Стационарные уравнения получаются из уравнений на коэффициенты произведения, являющегося многочленом по спектральному параметру, которое удовлетворяет уравнению Аппеля [7].

Вывод. В нашей работе в случае иерархии модифицированного уравнения Кортевега-де-Фриза мы от матричных пар Лакса перешли к скалярным и, меняя второй оператор, сравнивали результаты, которые дают оба этих подхода к исследованию. основных свойств, присущих нелинейным интегрируемым дифференциальным уравнениям в частных производных, которые могут описывать физические нелинейные явления.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда научных исследований, грант № 22-11-00196 (https://rscf.ru/project/22-11-00196/).

Список использованных источников:

1. Дубровин, Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения / Б.А. Дубровин // Успехи математических наук, - 1981. Т.36, №2. – С.11-80.

2. Михалев, В.Г. О гамильтоновых формализме иерархий типа Кортевега-де-Фриза/ В.Г Михалев // Функц. анализ и его прил. – 1992. Т.26, №2. – С.79-82

3. Miura, R. Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion / R. Miura, C. Gardner, M. Kruskal // J. Math. Phys. – 1968. Vol.9. – P.1205-1209.

4. Kaup, D.J A Higer-Order Water-Ware Equation and the Method for Solving It / D.J Kaup // Progress of Theoretical Physics. – 1975. Vol.54, No. 2. P.396-408.

5. Matveev, V.B. Solutions presque periodiques et a N-solitons de I'équation hydrodynamique non linéaire de Kaup / V.B. Matveev, M.I. Yavor // Ann. Inst. Henri Poincaré. – 1979. Vol XXXI, №1. – P. 25 – 41.

6. Смирнов, А.О. Вещественные конечнозонные регулярные решения уравнения Каупа-Буссинеска / А.О. Смирнов // Теоретическая и математическая физика. – 1986. Т.66, №1. – С.30-46.

7. Appell, P. Sur la transformation des quations différentielles linéaires / P. Appell // Comptes Rendus. – 1880. Vol. XCI. – P.211-214.