

УДК 519.21

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СЛОЖНОСТИ  
МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АППРОКСИМАЦИИ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ  
МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

**Лимар И. А** (федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»)

**Научный руководитель – к.ф.-м.н., Трифанов А. И.**

(федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»)

**Введение.** Многие процессы и явления описываются непрерывными моделями, которые хорошо и детально описаны, но, как правило, вычисление точного значения того или иного показателя либо невозможно, либо требует непозволительно больших вычислительных ресурсов. В связи с чем возникают задачи аппроксимации – приближённого вычисления величин с заданной точностью при ограниченных вычислительных и временных ресурсах. Отметим, что входными параметрами аппроксимирующих алгоритмов являются непрерывные объекты, которые невозможно непосредственно ввести в современные вычислительные системы и, как следствие, для которых необходимо найти оптимальное дискретное представление, объём которого называется информационной сложностью (англ. information based complexity). Для широкого класса задач общая вычислительная сложность оказывается пропорциональной информационной сложности, что делает важным её изучение. Кроме того, стоит отметить, что модели зависят от многих параметров, поэтому информационная сложность рассматривается как зависящая от пороговой ошибки и от параметрической размерности функция. Существуют несколько формальных постановок задачи анализа информационной сложности, но в данной работе рассматривается минимаксный случай. Традиционно в данной области изучаются классы информационной сложности [1], то есть находятся оценки сверху информационной сложности и критерии данных оценок, при этом в некоторых случаях соответствующие оценки оказываются грубыми. Кроме того, для анализа информационной сложности в постановке в среднем использовались методы теории суммы независимых случайных величин [2], однако в данной работе применяются предельные методы теории вероятностей для поиска оценки информационной сложности в минимаксной постановке.

**Основная часть.** Рассмотрим задачу вложения гильбертова пространства функций с квадратичным экспоненциальным воспроизводящим ядром, определяемым  $d$  масштабирующими параметрами, в пространство  $L^2$  интегрируемых функций относительно стандартной гауссовской меры. Минимаксной информационной сложностью для порога ошибки  $\varepsilon$  и параметрической размерности  $d$  является минимальная размерность вектора – оптимального дискретного представления входной функции, для которой найдётся аппроксимирующий алгоритм с максимальной ошибкой (по норме в  $L^2$ ), не превосходящей заданного порога ошибки  $\varepsilon$ .

Стоит отметить, что для данной постановки задачи информационная сложность выражается через собственные числа интегрального оператора с квадратичным экспоненциальным ядром [1], [3], но вследствие мультипликативной структуры собственных чисел многопараметрического оператора анализ информационной сложности прямым методом является нетривиальной задачей.

Для получения оценки информационной сложности её можно представить в виде математического ожидания некоторой случайной величины относительно некоторого вероятностного распределения, при этом данное распределение соответствует сумме независимых случайных величин, что позволяет применить методы теории суммирования независимых случайных величин. Так, получена асимптотическая оценка информационной сложности при фиксированном пороге ошибки  $\varepsilon$  и стремящейся к бесконечности

параметрической размерности  $d$ , и рассмотрен случай при стремящемся к нулю порогу ошибки  $\varepsilon_d$ , зависящей от параметрической размерности  $d$ , стремящейся также к бесконечности.

**Выводы.** Полученные асимптотические результаты уточняют оценки информационной сложности для минимаксной постановки при достаточно большой параметрической размерности или малом пороге ошибки, и методы анализа могут быть применены для других классов функций или обобщены. Кроме того, результаты могут быть полезны для компьютерного моделирования многопараметрических случайных процессов.

**Список использованных источников:**

1. E. Novak, H. Wóznikowski. Tractability of multivariate problems. Volume I: Linear Information. — Zürich : EMS publishing house, 2008.
2. Khartov A.A. Asymptotic analysis of average case approximation complexity of Hilbert space valued random elements // Journal of Complexity. — 2015. — Dec. — Vol. 31, no 6. — P. 835-866.
3. Rasmussen C.E., Williams C. Gaussian Processes for Machine Learning. — The MIT Press, 2006.

Лимар И. А. (автор)

Подпись

Трифанов А. И. (научный руководитель)

Подпись