Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО"

Факультет: Систем управления и робототехники

Направление подготовки: 01.04.02 - Математическое и компьютерное моделирование

ОТЧЕТ
о научно-исследовательской работе

Тема задания**: «Исследование структуры и неприводимых представлений образа Жордана группы SU(1,1)»**
Обучающийся: **Бондаренко Иван Николаевич, гр. R**
Научный руководитель: **Трифанов Александр Игоревич, Доцент факультета систем управления и робототехники**

Практика пройдена с оценкой

Подпись научного руководителя
(подпись)

Дата

Санкт-Петербург
2022 г

Техническое задание

Ознакомление с основной литературой по предмету. Поиск новых публикаций в различных источниках. Подготовка списка литературы и организация семинара.

Доклад и обсуждение на семинаре вопросов связанных с определением и структурой группы SU(1,1). Подготовка отчета с выводом формул для генераторов данной группы, а также изучение доказательства ее некомпактности.

Подготовка отчета, содержащего основные результаты обсуждения на семинаре. Корректирование списка литературы. Конспектирование основных пунктов обсуждения.

Аннотация

В работе рассматриваются структуры и неприводимых представлений образа Жордана группы SU(1,1), также вид и способы получения неприводимых представлений образа Жордана из представлений группы SU(1,1). Используется метод построения неприводимых представлений с помощью разложения в матричный вид ряда Фурье до первой производной. Главное достоинство используемого решения задачи в том, что он лёгок для освоения и прост в использовании, к тому же предоставляет большое количество информации.

Содержание

Введение

Для начала нужно изучить, что такое неприводимых представлений образа Жордана группы SU(1,1), и как пользоваться методом построения неприводимых представлений с помощью разложения в матричный вид ряда Фурье до первой производной.

SU(1,1) - структура, генераторы

Группа SU(1,1) – это группа матриц второго порядка, с определителем равным 1, оставляющих инвариантной формулу $|z^1|^2-|z^2|^2$. Отсюда сразу следует вид элемента группы G = {g}

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ \tilde{\omega} & \tilde{\alpha} \end{pmatrix},\ |\alpha|^2-|\omega|^2 = 1$$

$\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\omega}$ - это сопряжённые α и ω.

Найдем генераторы группы SU(1,1) - алгебру su(1,1):

SU(1,1) это унитарная группа, поэтому должно выполняться условие унитарности для каждого элемента группы.

Элемент группы выглядит и для него выполняется условие:

$$g \in SU(1,1); g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$g^\dagger \cdot g = g \cdot g^\dagger = 1$$

$$\begin{pmatrix} \alpha! & \gamma! \\ \beta! & \delta! \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha! \cdot \alpha + \gamma! \cdot \gamma = 1$$

$$\alpha! \cdot \beta + \gamma! \cdot \delta = 0$$

$$\beta! \cdot \alpha + \delta! \cdot \gamma = 0$$

$$\beta! \cdot \beta + \delta! \cdot \delta = 1$$

! – это сопряжение

Введём параметризацию элементов группы SU(1,1), при котором данное условие выполняется.

$$g \in SU(1,1); g(\theta,\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} ch\theta * e\hat{}(i\varphi) & sh\theta * e\hat{}(i\psi) \\ sh\theta * e\hat{}(-i\psi) & ch\theta * e(-i\varphi) \end{pmatrix}$$

У нас есть общий вид элемента группы SU(1,1). Генераторы находятся как первая производная по каждой переменной.

$$g = E + g'_\theta \cdot \theta + g'_\varphi \cdot \varphi + g'_\psi \cdot \psi$$

$$g'_\theta = \begin{pmatrix} sh\theta * e\hat{}(i\varphi) & ch\theta * e\hat{}(i\psi) \\ ch\theta * e\hat{}(-i\psi) & sh\theta * e(-i\varphi) \end{pmatrix}$$

$$g'_\varphi = \begin{pmatrix} i * ch\theta * e\hat{}(i\varphi) & 0 \\ 0 & -i * sh\theta * e\hat{}(-i\varphi) \end{pmatrix}$$

$$g'_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & i * ch\theta * e^{\wedge}(i\psi) \\ -i * ch\theta * e^{\wedge}(-i\psi) & 0 \end{pmatrix}$$

Генератором K_x является $g'(1,0,0)$. Вектор с координатами(1,0,0) .

$$K_x = g'(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Генератором K_y является $g'(0,1,0)$. Вектор с координатами(0,1,0).

$$K_y = g'(0,1,0) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Генератором K_z является коммутационное соотношение между[A1,A2].

$$K_z = [A1,A2] = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$$

Запишем наши генераторы через матрицы Паули

$$K_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; K_y = \sigma_{1*}\, \sigma_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; K_z = -2 * \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$$

SU(1,1) - непреводимые представления

Неприводимые представления SU(1,1) при отображении Жордана

Заключение

Проведена работа с источниками, результатом которых является раздел SU(1,1) - структура, генераторы. Выведены генераторы для построения представлений группы SU(1,1).

Так же составлен список литературы для дальнейшего продолжения исследований. Выбранный метод демонстрирует себя как рабочий. отвечающий требуемым задачам, решающим поставленные вопросы.

Список используемых источников

[1] Вейль Г. Теория групп и квантовая механика. Перевод с англ./ Под ред. Д П. Желобенко. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.- 496 с

[2] И. М. Гельфанд, З. Я. Шапиро, Представления группы вращений трёхмерного пространства и их применения, УМН,1952, том 7, выпуск 1(47), 3–117

[3] Хамермеш М. "Теория групп и ее применение к физическим проблемам"Год изд.: 2002

[4] On the unitary representations of SU(1,1) and SU(2,1). Biedenharn, L. C. ; Nuyts, J. ; Straumann, N. Annales de l'I.H.P. Physique th´eorique, Tome 3 (1965) no. 1, pp. 13-39

[5] L.C. Biedenharn, J. Math. Phys., t. 4, 1963, p. 436;

[6] Bargmann, V. Irreducible unitary representations of the Lorentz group. Ann. Of Math. (2) 48 (1947), 568–640