

УДК 519.21

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ МИНИМАКСНОЙ СЛОЖНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Лимар И. А (федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»)

Научный руководитель – к.ф.-м.н., Трифанов А. И.

(федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»)

Рассматриваются многопараметрические задачи аппроксимации и оценивается их сложность в минимаксном случае при фиксированном пороге ошибки и неограниченно большой параметрической размерности. Характерной особенностью предлагаемого подхода к анализу сложности аппроксимации является применение вероятностных методов, в частности, предельных теорем, что позволяет получить более точные оценки сложности аппроксимации.

Введение. Многие процессы и явления описываются непрерывными моделями, которые хорошо и детально описаны, но, как правило, вычисление точного значения того или иного показателя либо невозможно, либо требует непозволительно больших вычислительных ресурсов. В связи с чем возникают задачи аппроксимации – приближенном вычислении величин с заданной точностью при ограниченных вычислительных и временных ресурсах. Отметим, что входными параметрами аппроксимирующих алгоритмов являются непрерывные объекты, для которых необходимо найти оптимальное дискретное представление, объём которого называется информационной сложностью (англ. information based complexity). Для широкого класса задач общая сложность пропорциональна информационной сложности, что делает важным её изучение. Кроме того, стоит отметить, что модели зависят от многих параметров, поэтому информационная сложность зависит и от пороговой ошибки, и от параметрической размерности. Существует несколько постановок задачи анализа информационной сложности, но в данной работе остановимся на минимаксном случае.

Основная часть. Опишем в больших подробностях решаемую задачу. Рассмотрим задачу вложения гильбертова пространства функций с квадратичным экспоненциальным воспроизводящим ядром, определяемым d масштабирующими параметрами, в пространство L^2 интегрируемых функций относительно стандартной гауссовской меры. Минимаксной сложностью аппроксимации для порога ошибки ε и параметрической размерности d является минимальная размерность вектора – оптимального дискретного представления входной функции, для которой найдётся аппроксимирующий алгоритм с максимальной ошибкой (по норме в L^2), не превосходящей заданного порога ошибки. Стоит отметить, что для данной постановки задачи оптимальной аппроксимирующей функцией является частичная сумма ряда Фурье по собственным функциям интегрального оператора с квадратичным экспоненциальным ядром, определяемым d масштабирующими параметрами, и, как следствие, сложность аппроксимации выражается через собственные числа упомянутого интегрального оператора, но ввиду мультипликативной структуры собственных чисел анализ сложности аппроксимации напрямую является нетривиальной задачей.

На настоящий момент выделены несколько классов информационной сложности по характеру зависимости от пороговой ошибки и параметрической размерности: экспоненциальный, квази-полиномиальный, полиномиальный, сильно полиномиальный и сформулированы критерии принадлежности данным классам сложности так в достаточно общем случае, как и в уточнённых постановках. При этом сложность аппроксимации, как правило, оцениваются сверху и в некоторых случаях данные оценки оказываются грубыми. В предлагаемом подходе искомая сложность аппроксимации записывается на вероятностном языке с помощью вспомогательных случайных величин и применяются предельные теоремы теории

вероятностей, что позволяет получить асимптотику при сколь угодно большой параметрической размерности d и фиксированном пороге ошибки ε .

Выводы. Полученные результаты уточняют оценки минимаксной сложности аппроксимации, и методы анализа могут быть применены для других классов функций или обобщены. Кроме того, результаты могут быть полезны для компьютерного моделирования многопараметрических случайных процессов.