

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ

Тихонова Т.А. (Университет ИТМО, Санкт-Петербург),

Научный руководитель –к.ф.-м.н., Хватов А.А. (Университет ИТМО)

Работа посвящена численному решению дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Современные методы численного решения ДУЧП имеют ограничения по применимости. В данной работе предлагается подход на основе методов оптимизации, позволяющий решать широкий класс ДУЧП.

Дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП) являются одним из наиболее общих методов описания физических процессов. Большая часть таких уравнений на сегодняшний день не может быть решена аналитически. Современные численные методы решения ДУЧП в основном имеют ограничения на вид дифференциального оператора и граничных условий, что не позволяет им решать произвольные дифференциальные уравнения. С появлением методов получения физических моделей по реальным данным появилась потребность в численных методах ДУЧП, позволяющих решать произвольные уравнения, так как вид полученной модели заранее неизвестен.

Предложенный метод основан на совмещении методов оптимизации с численными методами дифференцирования. В работе показан пример с использованием метода конечных разностей. Производные дифференциального оператора аппроксимируются на введенной на области сетке разностными схемами. Правая часть уравнения также дискретизируется на введенной сетке. В итоге получается система алгебраических уравнений с неизвестными коэффициентами, которые подбираются с помощью минимизацией разностей правых и левых частей уравнений относительно значений искомой функции в узлах сетки.

Для оценки сходимости и устойчивости данного метода, им были решены волновое уравнение и уравнение теплопроводности. Средняя абсолютная ошибка полученного решения относительно точного решения, посчитанного в узлах сетки, падает с увеличением разбиения области, что свидетельствует о сходимости метода. Также было проведено несколько запусков для разных случайно сгенерированных начальных приближений. При этом разброс ошибки полученного решения в узлах оказался мал и не зависим от начального приближения. Это показывает устойчивость предложенного метода.

Из-за многомерной оптимизации время работы алгоритма велико, особенно это заметно на больших сетках. Чтобы сократить время работы для больших сеток, можно подбирать начальное приближение вместо задания случайного поля. Было показано, что использование решения малых сеток в качестве начального приближения для расчёта больших заметно сокращает время работы программы.

Предложенный метод решения произвольных ДУЧП был протестирован на гиперболических и параболических уравнениях и показал хорошую сходимость и устойчивость для этих классов задач. Хотя время работы алгоритма велико, его можно сократить для больших сеток с помощью задания начального приближения и запуска алгоритма на GPU.