УДК 519.21

СЛОЖНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ С КВАДРАТИЧНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ

Лимар И. А. (федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»)
Научный руководитель – к. ф.-м. н., доцент Хартов А. А.
(федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»)

Аннотация. Рассматривается сложность аппроксимации в среднем центрированных случайных полей с квадратичной экспоненциальной ковариационной функцией при возрастающей параметрической размерности поля. Получены критерии ограниченности и неограниченности величины сложности аппроксимации в среднем, а также при достаточно общих условиях найдены её логарифмические асимптотики.

Введение. Рассмотрим последовательность центрированных случайных полей Y_d, которые принимают значения в пространстве суммируемых с квадратом функций на R^d со стандартной гауссовской мерой. Ковариационные функции Y_d являются произведениями порядка d гауссовых ядер с параметрами σ_k. Случайные поля Y_d будем аппроксимировать полями конечного ранга, то есть конечными суммами, каждое слагаемое которых является произведением детерминированной функции и случайной величины. Для таких полей изучается сложность аппроксимации в среднем (далее – сложность аппроксимации), что по определению есть минимальный ранг, при котором относительная средняя квадратическая ошибка аппроксимации не превосходит заданного порогового значения ε.
Задачи оценки сложности аппроксимации как функции двух независимых переменных, размерности d и порога ошибки ε, изучались в работах Х. Вожняковского, М. А. Лифшица, Е. Новака, А. Папагеоргиу и других. В данной работе исследуется асимптотика сложности аппроксимации для случайных полей Y_d при фиксированном пороге ε и стремящейся к бесконечности размерности d.

Основная часть. Оптимальной аппроксимацией в смысле минимизации средней квадратической ошибки является частичная сумма известного разложения Карунена-Лоэва (стохастический аналог ряда Фурье). Тогда сложность аппроксимации Y_d выражается через зависящие от параметров σ_k собственные числа ковариационного оператора Y_d и можно сформулировать критерии ограниченности и неограниченности величины сложности аппроксимации через σ_k. Оказывается, что ограниченность сложности аппроксимации эквивалентна сходимости ряда, составленного из величин, обратных к квадратам σ_k, а неограниченность – расходимости данного ряда.
Рассмотрим случай неограниченности величины сложности аппроксимации Y_d. Удалось показать, что логарифмическая асимптотика при сколь угодно большой размерности d и фиксированной пороговой ошибке ε представима в виде суммы трёх слагаемых: первое есть произвольное вещественное a_d, второе – произведение положительного стремящегося к бесконечности b_d и квантильной функции $q(\varepsilon)$, третье – бесконечно малая в сравнении с b_d. В частности, при стремлении параметров σ_k к конечному ненулевому пределу a_d растёт как линейная функция, b_d – как квадратный корень, q – квантиль нормального распределения, а при стремлении параметров σ_k к нулю a_d может расти сколь угодно быстро при тех же b_d и q. При неограниченности и регулярном изменении параметров σ_k в большинстве случаев a_d и b_d регулярны, а q – квантиль нормального распределения, однако, если параметры σ_k эквивалентны квадратному корню из произведения k на логарифм k, q является квантилью распределения Дикмана.

Для вывода логарифмической асимптотики сложности аппроксимации Y_d используется следующий вероятностный подход. При растущей параметрической размерности d задается последовательность специальных вероятностных мер, выражаемых через собственные числа ковариационных операторов Y_d. Далее к ним специальным образом применяются предельные теоремы вероятностной теории суммирования независимых случайных величин. При этом производится детальная проверка необходимых условий. Далее применение общих результатов из работ А. А. Хартова дает искомую логарифмическую асимптотику сложности аппроксимации.

Выводы. Выведены критерии ограниченности и неограниченности сложности аппроксимации Y_d. Кроме того, показано, что логарифм сложности аппроксимации растёт линейно относительно размерности d при сходимости параметров σ_k к положительной константе, а при нулевом пределе логарифм сложности аппроксимации может расти сколь угодно быстро в зависимости от скорости сходимости к нулю параметров σ_k. Также при неограниченных параметрах σ_k в большинстве случаев логарифм сложности аппроксимации растёт не медленнее степенной функции от d при условии регулярного изменения параметров σ_k.